Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A VII-A

15 februarie 2015

1. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{50}$ invers proporţionale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{50}$ astfel încât $\sqrt{\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{49} a_{50}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Determinaţi mulţimea valorilor pe care le poate lua expresia $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50}$.

2. Se consideră triunghiul echilateral ΔABC, $BM \perp AC$, $M \in (AC)$, N simetricul punctului M faţă de punctul C şi punctul P astfel încât $m(\sphericalangle PBM) = 90^\circ$ şi $PN \| BM$. Fie $BC \cap MP = \{O\}$.

a) Să se arate că patrulaterul *BMNP* este dreptunghi. Patrulaterul *BMNP* este pătrat? Justificare.

b) Stabiliţi natura patrulaterului *STCM*, unde *S* este mijlocul segmentului (BO) şi *T* este mijlocul segmentului (PO).

c) Determinaţi raportul dintre aria suprafeţei triunghiulare ΔMOC şi aria suprafeţei triunghiulare ΔABC.

3. a) Arătaţi că oricare ar fi numerele reale *a,b,c* avem

$$|a+b| + |a+c| \geq |b-c| .$$

b) Demonstraţi că pentru orice număr real *x* avem

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2014| \geq 1007^2 .$$

GM

4. Se consideră un paralelogram cu un unghi de 120° şi având două laturi consecutive de lungimi *a* şi 2*a*. Dacă aria suprafeţei triunghiulare determinate de bisectoarele a două unghiuri alăturate şi una din laturile paralelogramului este de $5cm^2$, aflaţi aria paralelogramului. Discuţie.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore .Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.